**Parallelogrammbedingung**

Bestimmen Sie die Lösung $u = u(t,x)$ des charakteristischen Anfangswertproblems für die eindimensionale Wellengleichung

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0. \tag{1}$$

Genauer: Auf zwei sich schneidenden Charakteristiken

$$x + at = \alpha, \;\; x - at = \beta$$

seien die Werte der gesuchten Funktion $u$ vorgegeben:

$$u(t, \alpha - at) = f(t), \;\; u(t, \beta + at) = g(t)$$

mit zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $f, g$, so dass im Schnittpunkt der Charakteristiken die Werte übereinstimmen.

a) Bestimmen Sie die Lösung $u$ in Abhängigkeit von den Funktionen $f$ und $g$.

b) Bestätigen Sie für $u$ die Formel

$$u(t_0, x_0) + u(t_1, x_1) = u(t_2, x_2) + u(t_3, x_3)$$

für jedes „charakteristische Parallelogramm“, d. h. $(t_0, x_0), (t_1, x_1)$ und $(t_2, x_2), (t_3, x_3)$ sind gegenüberliegende Eckpunkte in einem Parallelogramm, dessen Seiten auf Charakteristiken der Wellengleichung liegen.

c) Zeigen Sie umgekehrt, dass jede dreimal stetig differenzierbare Funktion $u = u(t,x)$, die die Eigenschaft b) für alle charakteristischen Parallelogramme besitzt, eine Lösung der Wellengleichung ist.